Calculs explicites de surfaces abéliennes modulaires

L. Dembélé

Luxembourg

École d'été 2021 des jeunes chercheurs et jeunes chercheuses en théorie des nombres (JC2A)

23 - 27 août 2021

La variété abélienne associée à une forme nouvelle

Soit $X_0(N)$ la courbe modulaire de niveau N.

On sait que $X_0(N)$ est une courbe algébrique définie sur $\mathbb{Q}$.

Soit $J_0(N)$ la Jacobienne de $X_0(N)$. C'est une variété de dimension g.

On peut définir la Jacobienne comme étant

$$J_0(N)(\mathbb{C}) = S_2(N)^\vee / \mathrm{H}_1(X_0(N), \mathbb{Z})$$

avec

- $\mathrm{H}_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ est le groupe d'homologie ;
- $S_2(N)^\vee = \left(\Omega^1_{X_0(N)}\right)^\vee = \mathrm{Hom}(\Omega^1_{X_0(N)}, \mathbb{C})$.

La variété abélienne associée à une forme nouvelle

$\mathrm{H}_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ correspond à un réseau Λ_g de rank $2g$ dans $S_2(N)^\vee$.

On a donc

$$J_0(N)(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^g/\Lambda_g.$$

Le groupe $\mathrm{H}_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ peut être décrit en termes des symboles modulaires.

Pour obtenir le réseau, on procède comme suit :

1. On choisit une base intégrale $f_1, \ldots, f_g$ de $S_2(N)$;
2. On choisit une base $\delta_1, \ldots, \delta_{2g}$ de $\mathrm{H}_1(X_0(N), \mathbb{Z})$;
3. On intègre les formes différentielles données par la base $f_1, \ldots, f_g$ contre la base $\delta_1, \ldots, \delta_{2g}$ pour obtenir

$$\Lambda_g = \langle \delta_j, \omega_i \rangle, \text{ avec } \omega_i = 2\pi i f_i(\tau) d\tau.$$

La variété abélienne associée à une forme nouvelle

Soit $f \in S_2(N)$ une forme propre normalisée.

Alors il existe un homomorphism d'anneaux

$$\lambda_f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$$

déterminé par le fait que $Tf = \lambda_f(T)f$.

Posons

$$I_f := \mathrm{Ann}_{\mathbb{T}}(f) = \{T \in \mathbb{T} : Tf = 0\} = \ker(\lambda_f).$$

Alors on a

$$\mathbb{T}/I_f \simeq \mathcal{O}_f = \mathbb{Z}[\{a_n(f)\}].$$

Let corps $K_f = \mathbb{Q}(\{a_n(f)\})$ est appelé le corps des coefficients de f.

Il est le corps des fractions de $\mathcal{O}_f$.

La variété abélienne associée à une forme nouvelle

Si $f \in S_2(N)$ est une forme nouvelle, la variété abélienne associée à f est définie par

$$A_f := J_0(N)/I_f J_0(N).$$

A_f est une variété abélienne de dimension $[K_f : \mathbb{Q}]$ définie sur $\mathbb{Q}$ et que $\mathcal{O}_f \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_f)$.

La variété abélienne associée à une forme nouvelle

Sur $\mathbb{C}$, on peut décrire A_f comme suit.

Posons

$$V_f = \mathrm{span}([f]) \subset S_2(N).$$

Par restriction du sous-groupe $\mathrm{H}_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ de $S_2(N)^\vee$ aux fonctions de V_f, on obtient un sous-groupe du dual $V_f^\vee$ donné par

$$\Lambda_f = \mathrm{H}_1(X_0(N), \mathbb{Z})|_{V_f}.$$

On peut montrer que

$$A_f(\mathbb{C}) = V_f^\vee / \Lambda_f.$$

Le réseau Λ_f est le sous-groupe de symboles modulaires attaché à f.

On peut le calculer assez facilement, et cela permet de déterminer le réseau des périodes de A_f.

Construction d'Eichler-Shimura et modularité des courbes elliptiques

Théorème

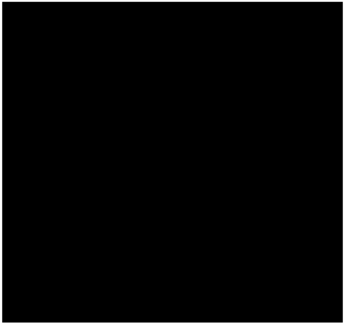
Il existe une application $f \mapsto E_f$ de l'ensemble des formes nouvelles f de niveau N et de poids 2, à coefficients entiers, à l'ensemble des courbes elliptiques de conducteur N définies sur $\mathbb{Q}$, telle que $L(f, s) = L(E_f, s)$. Cette application induit une bijection sur l'ensemble des classes d'isogénies.

Construction d'Eichler-Shimura et modularité des courbes elliptiques

Le Théorème 1 se résume par le diagramme ci-dessous :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Formes nouvelles } f\\ \text{de niveau } N \text{ et poids } 2\\ \text{avec coefficients entiers}\end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Classes d'isogénies de}\\ \text{courbes elliptiques } E/\mathbb{Q}\\ \text{avec } \mathrm{cond}(E) = N\end{array}}$$

Exemple : courbes elliptiques



Exemple : courbes elliptiques

```
> SetDefaultRealFieldPrecision(300);
> QQ := Rationals();
> PolsQQ<x> := PolynomialRing(QQ);
> M := CuspForms(73);
> N := Newforms(M);
> f := N[1][1];
> Mf := ModularSymbols(f);
> Pf := Periods(Mf, 3000);
> tau := Pf[2][1]/Pf[1][1];
> jtau := jInvariant(tau);
> PolsQQ!MinimalPolynomial(jtau, 1);
5329*x - 6128487
> j := Roots(PolsQQ!MinimalPolynomial(jtau, 1))[1][1];
> j;
6128487/5329
> Pf := [ Pf[1][1], Pf[2][1] ];
> EllipticCurveFromPeriods(Pf);
Elliptic Curve defined by y^2 + x*y = x^3 - x^2 + 4*x - 3
       over Rational Field
```

Construction d'Eichler-Shimura et modularité

Soit A une variété abélienne de dimension g définie sur $\mathbb{Q}$.

On dit que A est de type GL_2 s'il existe un corps de nombres K de degré g tel que $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ est un ordre dans K, c-à-d tel que $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q} = K$.

Théorème

Soit $K/\mathbb{Q}$ un corps totalement réel de degré g. Alors, il existe une application $f \mapsto A_f$ de l'ensemble des formes nouvelles $f \in S_2(N)$, avec $K_f = K$, à l'ensemble des variétés abéliennes de type GL_2 et de conducteur N^g, avec $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q} = K$, telle que

$$L(A_f, s) = \prod_{\tau \in \mathrm{Hom}(K_f, \overline{\mathbb{Q}})} L(f^\tau, s).$$

Cette application induit une bijection sur l'ensemble des classes d'isogénies.

Construction d'Eichler-Shimura et modularité

Comme précédemment, le Théorème 2 se résume par le diagramme suivant :

Formes nouvelles f (sur $\mathbb{Q}$) de poids 2 :	$\longleftrightarrow$	Classes d'isogénies de variétés abéliennnes $A/\mathbb{Q}$:
• niveau N ;		• $\dim(A) = g$;
• $\mathbb{Q}(\{a_n(f)\}) = K$;		• $\mathrm{cond}(A) = N^g$;
• $[K : \mathbb{Q}] = g$		• $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q} = K$

Le Théorème 2 généralise clairement le Théorème 1.

Surfaces abéliennes principalement polarisées

En général, il n'est pas facile de calculer la variété abélienne A_f associée à la forme nouvelle f dans le Théorème 2.

Par contre, lorsque A_f est une surface abélienne principalement polarisée, il existe des méthodes pour calculer sa classe d'isogénie.

La méthode que nous allons maintenant décrire, passe par les invariants d'Igusa et utilise la paramétrisation de Rosenhain.

Surfaces abéliennes principalement polarisées

Soit f une forme nouvelle à coefficients dans un corps quadratique réel K_f et A_f la surface abélienne associée à f.

On suppose que A_f est principalement polarisée.

Soit $\Omega = (\Omega_1 | \Omega_2)$ la matrice des périodes associée à A_f.

On peut calculer Ω à partir de V_f et Λ_f.

Soit $Z = \Omega_1^{-1}\Omega_2$ la matrice des périodes normalisée de A_f.

Surfaces abéliennes principalement polarisées

Lemme

Soit $h \in \mathbb{Q}[x]$ *un polynôme de degré* 5 *ou* 6 *tel que* A_f *soit la Jacobienne de la courbe* $C : y^2 = h(x)$*. Alors les racines de* h *ne dépendent que de* Z*.*

Démonstration.

Ceci est une autre façon de dire que la classe d'isomorphisme de A_f ne dépend que de Z. On peut exprimer les racines de h en termes des "nullwertes" ... $\square$

Surfaces abéliennes principalement polarisées

Lemme (Rosenhain)

Soient A une surface abélienne principalement polarisé et Z sa matrice des périodes normalisée de Riemann. Alors, il existe une courbe $C' : y^2 = x(x-1)h'(x)$ telle que $A' = \mathrm{Jac}(C')$ soit isomorphe à A. Le polynôme h' est uniquement déterminé par Z.

La paramétrisation de Rosenhain permet donc de calculer *a priori* les invariants d'Igusa ou d'Igusa-Clebsch qui déterminent la classe d'isomorphisme de A.

Exemples : calculs avec les symboles modulaires

Prenon $N = 73$. L'espace $S_2(73)^{\mathrm{new}}$ est de dimension 5 et se décompose trois orbites de Hecke :

$$
\begin{aligned}
f &= q + q^2 - q^4 + 2q^5 + 2q^7 - 3q^8 + O(q^9);\\
g &= q - \frac{\sqrt{5}+3}{2}q^2 + \frac{\sqrt{5}-3}{2}q^3 + \frac{3\sqrt{5}+3}{2}q^4\\
&\quad - \frac{\sqrt{5}+3}{2}q^5 + q^6 - 3q^7 - (2\sqrt{5}+3)q^8 + O(q^9);\\
h &= q + \frac{\sqrt{13}+1}{2}q^2 + \frac{-\sqrt{13}+1}{2}q^3 + \frac{\sqrt{13}+3}{2}q^4\\
&\quad - \frac{\sqrt{13}+1}{2}q^5 - 3q^6 - q^7 + 3q^8 + O(q^9).
\end{aligned}
$$

Exemples : calculs avec les symboles modulaires

D'abord, on calcule une base une base du groupe d'homologie $H_1(A_g, \mathbb{Z})$ en utilisant les symboles modulaires.

$$\begin{aligned}
\delta_1' &:= \{-1/48, 0\} - \{-1/24, 0\} + \{-1/36, 0\},\\
\delta_2' &:= \{-1/57, 0\} - \{-1/41, 0\} - \{-1/18, 0\} + \{-1/36, 0\},\\
\delta_3' &:= \{-1/62, 0\} - \{-1/52, 0\} + \{-1/18, 0\},\\
\delta_4' &:= \{-1/12, 0\} + \{-1/18, 0\} - \{-1/24, 0\}
\end{aligned}$$

La matrice d'intersection par rapport à cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemples : calculs avec les symboles modulaires

En calculant la forme alternée de Frobenius, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

On voit que la variété abélienne A_g a une polarisation principale $(2, 2)$.

Comme A_g est de dimension 2, elle est donc isogène à la Jacobienne d'une courbe de genre 2.

Exemples : calculs avec les symboles modulaires

Le change de base

$$\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\\delta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1'\\\delta_2'\\\delta_3'\\\delta_4'\end{pmatrix},$$

donne la base symplectique

$$\begin{aligned}
\delta_1 &:= \{-1/48,0\} - \{-1/24,0\} + \{-1/36,0\},\\
\delta_2 &:= \{-1/48,0\} + \{-1/62,0\} - \{-1/52,0\} + \{-1/18,0\}\\
&\quad - \{-1/24,0\} + \{-1/36,0\},\\
\delta_3 &:= \{-1/57,0\} - \{-1/41,0\} - \{-1/18,0\} + \{-1/36,0\},\\
\delta_4 &:= \{-1/12,0\} + \{-1/18,0\} - \{-1/24,0\}.
\end{aligned}$$

Exemples : calculs avec les symboles modulaires

On calcule une base intégrale de $H^1(A_g, \mathbb{C})$ à partir de l'orbite de Hecke de g.

On intègre cette base contre $H_1(A_g, \mathbb{Z})$.

Cela donne la matrice des périodes $\Omega := (\Omega_1 | \Omega_2)$, avec

$$\Omega_1 := \begin{pmatrix} 1.41...i & -7.18... + 0.70...i \\ -2.49...i & -4.41... - 1.24...i \end{pmatrix},$$

$$\Omega_2 := \begin{pmatrix} -2.76... + 3.37...i & -5.32...i \\ 1.65... + 0.70...i & -3.90...i \end{pmatrix}.$$

Exemples : calculs avec les symboles modulaires

Enfin, on applique le Théorème de Torelli pour obtenir la courbe C_g dont la Jacobienne est A_g.
Pour cela on procède comme suit :

1. On calcule la matrice des périodes normalisée de Riemann ;
2. On calcule les invariants Igusa-Clebsch en utilisant le Théorème de Rosenhain (avec suffisamment de précision) ;
3. On identifie les invariants d'Igusa-Clebsch comme des nombres rationnels ;
4. On applique l'algorithme de Mestre pour déterminer un modèle de la courbe C_g.

Exemples : calculs avec les symboles modulaires

Après avoir fait tout ceci, on obtient le modèle

$$C'_g : y^2 = -x^6 - 2x^5 - x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x - 1,$$

ce qui nous permet de trouver le modèle minimal global

$$C_g : y^2 + (x^3 + x^2 + 1)y = x^3 - x$$

dont la Jacobienne a RM par $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.